研究会報告

マルチフラクタルパターンの統計力学

名大・工　本田勝也

自己相似性を満たすパターンに対して，フラクタル幾何学がその定量的な解析手段を与えることは良く知られています。周期的な構造を示すパターンには，基本的にフーリエ解析が有効ですが，それ以外の複雑なパターンを取り扱う手段をもたなかったことを考えると，フラクタル幾何学の物理学に対して果たす役割は，決して小さいものではないでしょう。事実フラクタルに関する論文は爆発的な勢いで発表されてきました。しかし，ここに至って全体の状況はやや落ち着きを取り戻し，反省を要する時期を迎えているように思われます。すなわち，物理学としてフラクタル幾何学を取り扱う場合，対象とする現象を我々が理解することにどのように係わるかが問われることになります。複雑なパターンのフラクタル次元を計算するだけでは済みません。例えば，一見して全く異なるパターンでも同じフラクタル次元をもつことは良くありますが，それはたまたま偶然にすぎないのでしょうか。はたまた，人間の認識力を越えた普遍性が存在するのでしょうか。我々が観測できる物理量とどのようにかかわっているのか，そもそもその対象はなぜそのフラクタル次元を有するのか，等々困難な問題は多く存在します。勿論，フラクタルパターン上での拡散や伝導が自己相似性を反映していることや，フラクタル次元が厳密に求められている例もありますが，物理学において真の市民権を勝ち取るためには，フラクタル幾何学をもう一段階上に押し上げるブレークスルーが必要であるように感じられます。

さて，フラクタル幾何学は，フラクタルの概念を自己アフィンおよびマルチフラクタルと拡張しています。前者は，異方的な自己相似性が成立するパターンに対して適用され，後者は言わば濃淡の自由度が加味されたパターンに適用されます。この小文では，後者について簡単な概説をします。詳しくは，多く出版されている文献を参照してください。

フラクタルパターンを台（サポート）として，その上の測度を考慮します。測度としては，上述した濃淡でも良いですし，成長するフラクタルパターンの場合には，各場所における成長確率なども対象になります。どのような測度を取り上げるかは，問題によりますが，物理学的要請によって興味ある測度を考慮することになります。与えられたパターンを，大きさεのセルに分割し，それぞれのセルに確率測度$P_i(\varepsilon)$を割り当てます。添字 i は確率測度が０でないセルの番号で，全部で$N(\varepsilon)$個あるものとします。この確率測度はε

→0に対して一般に

$$P_i(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha_i} \tag{1}$$

とスケールされるでしょう。この指数α_iは特異性指数と呼ばれ，分布確率の局所的な性質を特徴づける量です。同じ特異指数α_iをもつ点の集合もフラクタル次元$f(\alpha)$をもつと仮定することも妥当でしょう。この正当性は後に考察します。すなわち，α_iがαと$\alpha+d\alpha$の間をとる点の数は$\varepsilon\to 0$で$\rho(\alpha)\varepsilon^{-f(\alpha)}d\alpha$と見積もられます。この$f(\alpha)$は特異性スペクトラムと呼ばれ，特異性指数$\alpha$をもつ部分集合のフラクタル次元です。この特異性スペクトラムを求めるためには統計力学的定式化が役立ちます。分配関数

$$Z_\varepsilon(q) = \Sigma_i [P_i(\varepsilon)]^q \tag{2}$$

を定義します。(2) 式を用いて分配関数は

$$Z_\varepsilon(q) = \int d\alpha \rho(\alpha) \varepsilon^{q\alpha - f(\alpha)} \tag{3}$$

と書き直されますが，さらに鞍部点法によって，

$$Z_\varepsilon(q) \sim \varepsilon^{q\alpha(q) - f(\alpha(q))} \tag{4}$$

となります。ここで$\alpha(q)$は，$df(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha(q)}=q$で与えられます。故にもし分配関数が，$Z_\varepsilon(q)\sim\varepsilon^{\tau(q)}$とスケールされるならば，特異性スペクトラムはルジャンドル変換を通じて

$$\alpha(q) = d\tau(q)/dq, \qquad f(q) = q\alpha(q) - \tau(q) \tag{5}$$

と，パラメータqを介して表されます。分配関数がスケールされるならば，特異性スペクトラムの存在が保証されます。この導出過程から，q ↔ 逆温度，α ↔ エネルギー，f ↔ エントロピー，τ ↔ 自由エネルギーという熱力学との対応関係は自明と言えましょう。

より統計力学的視点を明確にするために，パターンの分割に工夫をしてみます。簡単のために1次元的に配列されたパターンを考えますが，高次元への拡張は容易です。パターンの中央で半分に分け，左半分に$s=-1$，右半分に$s=+1$を割り当てます。さらにそれぞれの部分を半分割して左から順に$(-1,-1)$, $(-1,+1)$, $(+1,-1)$, $(+1,+1)$ とします。このような分割をn回続けると，大きさ$\varepsilon=(1/2)^n$に細分割された各々の部分にn個の+1と-1とからなる数列$\{s\}=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$が割り当てられます。すなわち，パターンの存在する実空間を，スピンの配位空間とみなすことができます。こうして，i番目のセルに付随した確率測度$P_i(\varepsilon)$は$P(\{s\})$と表されます。もし情報量を用いてハミルトニアンを$H(\{s\}) = -\ln P(\{s\})$と定義しますと，分配関数$Z_\varepsilon(q)$は

$$Z_n(q) = \Sigma_{\{s\}} \exp[-qH(\{s\})] \tag{6}$$

となり，n個のイジングスピンに対する分配関数と同形になります。

研究会のサブタイトル「多様性の中の類似性」がここにも表れています。平衡系で発達している様々な概念や方法がパターンのマルチフラクタル解析にも適用できることは，これまでの説明で理解されるでしょう。その例題は，物性研究 52-4(1989/7)456に示されていますので興味のある方はそちらを見てください。パターン解析の特徴をいかに取り出すかが課題ですが，それは今後に残されています。